

# 1 Einleitung

Im Logikteil wollen wir zwei Logiken, die Aussagenlogik und die Prädikatenlogik, betrachten. Logiken spielen in der Informatik bei den verschiedensten Anwendungen eine wichtige Rolle. Mit ihr lassen sich Sachverhalte aus der realen Welt abstrakt ausdrücken (es wird also quasi ein Modell der Welt in der Logik ausgedrückt). In der Logik können dann Schlussfolgerungen gezogen werden und diese können dann wieder als Sachverhalte in der realen Welt interpretiert werden. Ein Grundbaustein der Logik sind die Formeln. Beispielsweise ist  $N \vee \neg R$  eine aussagenlogische Formel, die für “ich bin nass ( $N$ ) oder ( $\vee$ ) es regnet ( $R$ ) nicht ( $\neg$ )” stehen könnte. Wenn man nun wüsste das dieser Sachverhalt und zusätzlich noch  $R$  (es regnet) gilt, könnte man schlussfolgern, dass dann  $N$  gelten muss (ich bin nass). Mit der Logik können wir solche Schlussfolgerungen formalisieren, sie in komplizierteren Kontexten machen und dies auch (in Teilen) automatisieren.

Die Einsatzgebiete der verschiedenen Logiken sind in der Informatik recht vielfältig. So finden sie z.B. Einsatz bei dem Thema künstliche Intelligenz, bei Datenbanken, bei der Beschreibung von technischen Schaltkreisen, in der Software- und Hardwareverifikation, als Grundlage von logikorientierten Programmiersprachen wie beispielsweise Prolog und noch in etlichen Bereichen mehr. In vielen dieser Bereiche ist zudem ein Zusammenspiel von Logik und Automaten von Bedeutung. So werden z.B. in der Verifikation oft die System durch Automaten modelliert und durch eine Formel in einer Logik eine bestimmte Eigenschaft spezifiziert. Die Frage ist dann, ob das Modell die Spezifikation erfüllt. Wir werden nur am Rande und nicht vertiefend auf diese Anwendungsgebiete der Logik eingehen können. In späteren, vertiefenden Veranstaltungen wird einem die Logik aber immer wieder begegnen, so dass ein gutes Grundlagenwissen hierzu sehr nützlich ist.

Oftmals werden in verschiedenen Anwendungs- und Forschungskontexten verschiedene oder spezielle Logiken eingesetzt. Wir behandeln nachfolgend die Aussagenlogik und die Prädikatenlogik.

Die Aussagenlogik ist eine ganz grundlegende Logik, die quasi als Teillogik in den meisten anderen Logiken enthalten ist. So werden z.B. in der Aussagenlogik einfache Verknüpfungen wie *nicht*, *und* und *oder* eingeführt, die man in den meisten anderen Logiken auch haben möchte. Ferner werden in der Aussagenlogik wichtige Konzepte und Begriffe eingeführt, die dann in andere Logiken übernommen werden. Sie ist daher auch hervorragend zum Einüben dieser Konzepte geeignet. Ferner, und für uns besonders interessant, spielt das

Erfüllbarkeitsproblem der Aussagenlogik, d.h. die Frage, gegeben eine Formel der Aussagenlogik, kann diese zu wahr ausgewertet werden, eine zentrale Rolle in der Komplexitätstheorie und wird uns dort wieder begegnen.

Wir werden zunächst die *Syntax* der Aussagenlogik einführen, d.h. wir werden formal einführen, wie die Formeln der Aussagenlogik eigentlich aussehen dürfen, was wir also hinschreiben dürfen. Im Anschluss werden wir die *Semantik* der Aussagenlogik einführen, d.h. wir werden definieren, wann eine Formel wahr und wann eine Formel falsch ist und wie wir zu diesen Werten kommen. Nachfolgend geht es dann um Beziehungen zwischen Formeln. Hier führen wir die Begriffe der Folgerbarkeit und der Äquivalenz ein. Es wird dann viel darum gehen Formeln auf diese Eigenschaft zu prüfen und darauf, ob sie wahr gemacht werden können. Wir werden sehen, dass dies zwar gemacht werden kann, aber mit den nahe liegenden Verfahren zu aufwändig ist. Daher werden wir uns noch mit weiteren Verfahren wie z.B. der Resolution beschäftigen.

Ähnlich werden wir dann auch in der Prädikatenlogik vorgehen. Sie ist ein gutes Beispiel dafür, wie die Aussagenlogik erweitert werden kann, um zu einer deutlich ausdrucksstärkeren Logik zu gelangen. So werden in der Prädikatenlogik aufbauend auf den Bausteinen der Aussagenlogik noch unter anderem Quantoren eingeführt, so dass dann Formeln der Art  $\forall x(A(x) \Rightarrow B(x))$  möglich sind, um auszudrücken, dass für alle Elemente  $x$  einer noch zu beschreibenden Grundmenge gilt, wenn  $x$  die Eigenschaft  $A$  hat, dann auch die Eigenschaft  $B$ . Um die Prädikatenlogik meistern zu können, braucht man allerdings ein gutes Verständnis der Aussagenlogik, da diese in ihr als Teil enthalten ist und da viele Konzepte der Aussagenlogik übertragen werden. Wir beginnen daher nun mit der Aussagenlogik und definieren zunächst, was wir überhaupt eine Formel nennen dürfen.